数理解析研究所講究録 1270 巻 2002 年 51-62

閉リーマン面上の群作用が定める母関数

愛知産業大学経営学部　木村秀幸（Hideyuki Kimura）
Faculty of Business Administration
Aichi Sangyo University

この論文では [2] に従い閉リーマン面上の群作用が定めるある種の母関数が有理関数となることを示す。

§１. 問題設定

Σ_g を種数 $g(\geq 0)$ の向き付け可能な閉曲面、G を有限群、$\mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$ を Σ_g 上の向きを保つ微分自己同相写像全体の作る群とする。単射準同型写像

$$\tau : G \to \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$$

が存在するとき G は Σ_g 上に作用するという。τ を Σ_g 上の $G-$作用と呼ぶ。

G を任意の有限群とする。このとき、$G-$作用を許す Σ_g が常に存在するので問題となるのは $\{g| \Sigma_g$ が $G-$作用を許す$\}$ がどのような集合であるかである。この問いに対して Kulkarni は次のような解答を与えた。(証明については付録２参照)

<u>定理（Kulkarni [1]）</u> 有限群 G に対して stable genus increment と呼ばれる正の整数 $n_0(G)$ が定まり、次の (1), (2) が成り立つ：

(1) $\Sigma_g\ (g \geq 2)$ が $G-$作用を許すとき $g \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n_0(G))$。

(2) $\{g| \Sigma_g$ が $G-$作用を許す$\}$ は $\{g(\geq 2) | g \equiv 1(\mathrm{mod}\, n_0(G))\}$ から高々有限個の元を除いた集合。

この Kulkarni の定理から集合 $\{g| \Sigma_g$ が $G-$作用を許す$\}$ の g が十分大きい場合の様子が分かったので、次に問題となるのは Σ_g が “どの程度” $G-$作用を許すかである。このとき $G-$作用を数える基準が必要となる。このため $q-$同値という同値関係を定める：

<u>定義</u>　Σ_g 上の２つの $G-$作用

$$\tau_1, \tau_2 : G \to \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$$

が $q-$同値とは $\Sigma_g/\tau_1(G)$ と $\Sigma_g/\tau_2(G)$ が orbifold として同型であることをいう。

N_gをΣ_g上のG–作用のq–同値類の個数とする。このとき、

$$q_G(z) := \sum_{g \geq 0} N_g z^g$$

とおく。本論文の目的は次の定理を示すことである：

<u>定理</u>　Gを任意の有限群とする。このとき、$q_G(z)$はzの有理関数である。

§２.準備

Gを任意の有限群とし、以下これを固定する。Σ_g上のG–作用$\tau : G \to \mathrm{Diff}^+(\Sigma_g)$は群$\Gamma$から$G$への torsion free kernel を持つ全射準同型写像を定める。ただし、Γは次の表示を持つ：

$$\Gamma = \left\langle c_1,\ldots,c_t,a_1,b_1,\ldots,a_h,b_h \,\middle|\, c_1^{m_1} = \cdots = c_t^{m_t} = 1, \prod_{i=1}^{t} c_i \prod_{j=1}^{h} [a_j,b_j] = 1 \right\rangle$$

このとき、$\sigma := (h;m_1,\ldots,m_t)$を$\Gamma$の signature と呼ぶ。また上記の表示を持つΓを$\Gamma(\sigma)$と表す。

$O(G)$を群Gの nontrivial な元の位数全体の集合とし、$O(G) = \{n_1,\ldots,n_r\}$とする。そして

$$\Sigma(O) := \{(h;m_1,\ldots,m_t) | m_i \in O(G), h \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。$\Sigma(O)$の元$\sigma = (h;m_1,\ldots,m_t)$、$\sigma' = (h';m'_1,\ldots,m'_u)$に対して和を次のように定義する：

$$\sigma + \sigma' = (h+h';m_1,\ldots,m_t,m'_1,\ldots,m'_u)$$

$\Sigma(O)$はこの和に関して半群となり、次の signature により生成される：

$$\sigma_0 = (1;-)、\sigma_1 = (0;n_1)、\ \ldots、\sigma_r = (0;n_r).$$

$\Sigma(O)$の任意の元$\sigma = (h;m_1,\ldots,m_t)$は$r+1$個の非負の整数の組$(a_0,a_1,\ldots,a_r)$を用いて

$$\sigma = a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + \cdots + a_r\sigma_r \qquad (a_0 = h、a_i = \#\{m_j | m_j = n_i\})$$

と一意的に表されるので、以下、σと$(a_0,a_1,\ldots,a_r)$を同一視する。また

$\Sigma(G) := \{\sigma \in \Sigma(O) |$ torsion free kernel を持つ全射準同型写像$\phi : \Gamma(\sigma) \to G$が存在する$\}$

とおき、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0,x_1,\ldots,x_r) = \sum_{(a_0,a_1,\ldots,a_r) \in \Sigma(G)} x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \qquad \cdots \quad (*)$$

と定義する。

§３．定理の証明

定理を証明するために上で定義した$\Phi_{\Sigma(G)}$を含む２つの等式を示す。

(I) $$q_G(z) = z^{1-o(G)}\Phi_{\Sigma(G)}(z^{n_0(G)q_0}, z^{n_0(G)q_1}, \ldots, z^{n_0(G)q_r})$$

ただし、$o(G)$はGの位数、$n_0(G)$はstable genus increment、

$$q_0 = \frac{o(G)}{n_0(G)} \quad 、\quad q_i = \frac{o(G)}{2n_0(G)}(1-\frac{1}{n_i}) \quad (i=1,\ldots,r).$$

(II) $$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0, x_1, \ldots, x_r) = \frac{\overline{\sum_{\sigma=(a_0,\ldots,a_r)\in X} \mu(\hat{0},\sigma) x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}}}{\prod_{i=0}^{r}(1-x_i^2)}$$

ただし、Xは$\Sigma(G)$のある有限部分集合、μはMöbius関数（付録１参照)、$\hat{0}$は補題２の証明参照。

<u>定理の証明</u>　(I)、(II) 式より

$$q_G(z) = z^{1-o(G)} \frac{\overline{\sum_{\sigma=(a_0,\ldots,a_r)\in X} \mu(\hat{0},\sigma) z^{n_0(G)\sum_{i=0}^{r} a_i q_i}}}{\prod_{i=0}^{r}(1-z^{2n_0(G)q_i})}$$

さらに$q_0,\ldots,q_r$の定義およびRiemann-Hurwitzの関係式より$q_G(z)$がzの有理関数であることがわかる。　証明終

§４．(II) 式の証明

(II) 式を示すために補題を３つ準備する。

<u>定義</u>　$\Sigma(O)$の元$(a_0,\ldots,a_r),(b_0,\ldots,b_r)$に対してbinary orderingと呼ばれる半順序$\le_B$を次のように定める：

$$(a_0,\ldots,a_r) \le_B (b_0,\ldots,b_r) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_i \le b_i \text{ , } a_i \equiv b_i (\mathrm{mod}\, 2) \quad (i=0,\ldots,r)$$

以下、$\Sigma(O)$上にはbinary ordering$\le_B$が与えられているとする。

<u>補題１</u>　Kを$\Sigma(O)$の空でない部分集合とする。このとき、Kの$\le_B$に関する極小元全体の集合は空でない有限集合である。

補題2　Xを$\Sigma(O)$のjoin-closedな有限部分集合とし、$K=\bigcup_{\sigma\in X}C_\sigma$とおく。ただし、$C_\sigma=\{\tau\in\Sigma(O)|\sigma\le_B\tau\}$（$C_\sigma$を$\sigma$上のconeと呼ぶ）。このとき、

$$\Phi_K=-\sum_{\sigma\in X}\mu(\hat{0},\sigma)\Phi_{C_\sigma}$$

が成り立つ。（Φ_K、Φ_{C_σ}は (*) 式の$\Sigma(G)$をK、C_σとしたもの、Xがjoin-closedであるとはXの２元σ、τに対して、最小上界$\sigma\vee\tau$ (i.e. 集合$\{\rho\in\Sigma(O)|\sigma\le_B\rho,\tau\le_B\rho\}$の最小元）が、存在する場合には、常に$X$に含まれることをいう。）

補題3　（１）任意の$\sigma\in\Sigma(G)$に対して$C_\sigma\subset\Sigma(G)$が成り立つ。（このとき$\Sigma(G)$はclosed under conesであるという）（２）$\sigma=(a_0,a_1,\ldots,a_r)\in\Sigma(G)$に対して

$$\Phi_{C_\sigma}(x_0,x_1,\ldots,x_r)=\frac{x_0^{a_0}x_1^{a_1}\cdots x_r^{a_r}}{\prod_{i=0}^{r}(1-x_i^2)}$$

が成り立つ。

補題2の証明　以下では$\le_B$を単に$\le$と表す。$\hat{0}<\omega$ $(\forall\omega\in\Sigma(O))$を満たす元$\hat{0}$を考える。そして$C_{\hat{0}}:=K\cup\{\hat{0}\}$　、　$C_\sigma'=C_\sigma-\bigcup_{\substack{\rho\in X\\ \sigma<\rho}}C_\rho$（$\sigma\in\hat{X}:=X\cup\{\hat{0}\}$）とおく。このとき、

C_ρ $(\rho\in X)$は次のように有限個の集合の直和に分解される：$C_\rho=\sum_{\substack{\sigma\in\hat{X}\\ \rho\le\sigma}}C_\sigma'$.

従って、$F(\sigma)=\Phi_{C_\sigma}$、$G(\sigma)=\Phi_{C_\sigma'}$とおくと

$$F(\rho)=\Phi_{C_\rho}=\sum_{\substack{\sigma\in\hat{X}\\ \rho\le\sigma}}\Phi_{C_\sigma'}=\sum_{\substack{\sigma\in\hat{X}\\ \rho\le\sigma}}G(\sigma)$$

が得られる。この式にMöbiusの反転公式（付録１参照、$\hat{X}$が有限集合なのでMöbiusの反転公式の仮定が満たされることに注意）を適用すると

$$G(\rho)=\sum_{\substack{\sigma\in\hat{X}\\ \rho\le\sigma}}\mu(\rho,\sigma)F(\sigma)$$

が得られる。ここで$\mu(\rho,\sigma)$はMöbius関数。この式に$\rho=\hat{0}$を代入することにより

$$\Phi_K=F(\hat{0})-G(\hat{0})=-\sum_{\sigma\in X}\mu(\hat{0},\sigma)F(\sigma)=-\sum_{\sigma\in X}\mu(\hat{0},\sigma)\Phi_{C_\sigma}$$

が得られる。　証明終

補題3の証明　$\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_r)\in\Sigma(G)$に対して

$$C_\sigma=\{(b_0,b_1,\dots,b_r)\in\Sigma(O)|\ a_i\le b_i\ ,\ a_i\equiv b_i(\mathrm{mod}\,2)\ \ (i=0,\dots,r)\}$$

であることに注意する。

（1）上の注意より任意の$\sigma\in\Sigma(G)$に対して、$\sigma':=\sigma+2\sigma_l\ (l=0,\dots,r)$が$\Sigma(G)$に含まれることを示せばよい。（$\sigma_0=(1;-),\sigma_1=(0;n_1),\dots,\sigma_r=(0;n_r)$であった）そこで$\phi:\Gamma(\sigma)\to G$を torsion free kernel を持つ全射準同型写像とする、ただし、

$$\Gamma(\sigma)=\left\langle c_1,\dots,c_t,a_1,b_1,\dots,a_h,b_h\middle|c_i^{m_i}=1,\prod_{i=1}^{t}c_i\prod_{j=1}^{h}[a_j,b_j]=1\right\rangle$$とする。このとき

$$\Gamma(\sigma')=\left\langle c_1,\dots,c_t,a_1,b_1,\dots,a_h,b_h,a_{h+1},b_{h+1},a_{h+2},b_{h+2}\middle|c_i^{m_i}=1,\prod_{i=1}^{t}c_i\prod_{j=1}^{h+2}[a_j,b_j]=1\right\rangle(l=0\text{のとき})$$

$$\Gamma(\sigma')=\left\langle c_1,\dots,c_t,c_{t+1},c_{t+2},a_1,b_1,\dots,a_h,b_h\middle|c_i^{m_i}=c_{t+1}^{n_l}=c_{t+2}^{n_l}=1,\prod_{i=1}^{t+2}c_i\prod_{j=1}^{h}[a_j,b_j]=1\right\rangle(l>0\text{のとき})$$

となる。そして、$\phi':\Gamma(\sigma')\to G$を次のように定める：

$l=0$のとき　$\phi'|_{\Gamma(\sigma)}=\phi$、$\phi'(a_{h+1})=\phi'(b_{h+1})=\phi'(a_{h+2})=\phi'(b_{h+2})=1$。

$l>0$のとき　$\phi'|_{\Gamma(\sigma)}=\phi$、$\phi'(c_{t+1})=s$、$\phi'(c_{t+2})=s^{-1}$、ただし、$s$は$G$の位数$n_l$の元。

上で定めた$\phi':\Gamma(\sigma')\to G$は torsion free kernel を持つ全射準同型写像なので$\sigma'=\sigma+2\sigma_l\in\Sigma(G)\ (l=0,\dots,r)$が成り立つことがわかる。従って、$\Sigma(G)$が closed under cones であることがわかる。

（2）$\sigma=(a_0,a_1,\dots,a_r)\in\Sigma(G)$に対して$C_\sigma$は上記の形をしているので

$$\Phi_{C_\sigma}(x_0,x_1,\dots,x_r)=\sum_{(b_0,b_1,\dots,b_r)\in C_\sigma}x_0^{b_0}x_1^{b_1}\cdots x_r^{b_r}=\sum_{k_0,k_1,\dots,k_r=0}^{\infty}x_0^{a_0+2k_0}x_1^{a_1+2k_1}\cdots x_r^{a_r+2k_r}$$

$$=\sum_{k_0=0}^{\infty}x_0^{a_0+2k_0}\sum_{k_1=0}^{\infty}x_1^{a_1+2k_1}\cdots\sum_{k_r=0}^{\infty}x_r^{a_r+2k_r}=\frac{x_0^{a_0}}{1-x_0^2}\frac{x_1^{a_1}}{1-x_1^2}\cdots\frac{x_r^{a_r}}{1-x_r^2}$$

証明終

以上の準備の下で (II) 式の証明を述べる。

(II) 式の証明　補題1より$\Sigma(G)$の極小元全体の集合は有限集合となる。$\rho_1,\dots,\rho_m$を

$\Sigma(G)$の極小元全体とする。そして

$$X := \{\rho_{i_1} \vee \rho_{i_2} \vee \dots \vee \rho_{i_n} \mid \{\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_n}\} \text{は} \{\rho_1, \dots, \rho_m\} \text{の部分集合}\}$$

とおくとXはjoin-closedな有限集合となる。従って、このXは補題2の仮定を満たし、さらに

$$\Sigma(G) = \bigcup_{\sigma \in X} C_\sigma$$

を満たす。（($\supset$)は補題3（1）より得られる。($\subset$)はXが$\Sigma(G)$の極小元全体を含むことから得られる。）よって補題2より

$$\Phi_{\Sigma(G)} = -\sum_{\sigma \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) \Phi_{C_\sigma}$$

が得られ、さらに補題3（2）より (II) 式が得られる。　　証明終

参考文献

[1] R.S.Kulkarni, Symmetries of surfaces,Topology **26**,No.2 (1987) pp.195-203.

[2] C.Maclachlan and A.Miller, Generating functions for finite group actions on surfaces. Math. Proc.Camb.Phil.Soc.**124** (1998) pp.21-49.

[3] R.P.Stanley, Enumerative combinatorics Vol.I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49 (Cambridge University Press)

付　録　1

Möbius関数（[3, p.116]）　locally finiteな半順序集合Σ上のMöbius関数$\mu : \mathrm{Int}(\Sigma) \to \mathbf{Z}$とは

$$\mu(x,x) = 1 \quad \text{for all } x \in \Sigma$$

$$\mu(x,y) = -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z) \quad \text{for all } x < y \text{ in } \Sigma$$

で定まる関数$\mu(x,y)$のことをいう。ただし、$\mathrm{Int}(\Sigma)$はΣの区間$[x,y] (= \{z \in \Sigma \mid x \le z \le y\})$全体の集合とし（空集合は区間に含めない）、$\mu([x,y])$を単に$\mu(x,y)$と書く。また、半順序集合$\Sigma$がlocally finiteであるとは任意の区間$[x,y]$が有限集合である場合をいう。

Möbiusの反転公式（[3, p.116]）　Σを任意のcone $C_x (= \{y \in \Sigma \mid x \le y\})$が有限集合となる半順序集合とする。$f$、$g$を$\Sigma$上の複素数値関数とする。このとき

$$g(x) = \sum_{x \le y} f(y) \text{ for all } x \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{x \le y} \mu(x,y) g(y) \text{ for all } x \in \Sigma$$

付 録 2 (Kulkarniの定理の証明)

以下では[1]に沿ってKulkarniの定理の証明を述べる。([2]の記号、定義とは異なる部分がある)

記号 Gを位数dの有限群、δをdの素因数全部の集合、G_pをGのpSylow部分群、G_pの位数をp^{n_p}、Gのp-巾指数をp^{e_p}(すなわち、G_pに含まれる元の位数の最大値がp^{e_p})とする。さらに、$p\in\delta$に対して

$$f_p=\begin{cases} n_p-e_p & p\text{が奇素数 または } p=2\text{かつ}n_2=e_2\text{のとき} \\ n_2-e_2-1 & p=2\text{かつ}n_2>e_2\text{のとき}\end{cases}$$

$$N=\prod_{p\in\delta}p^{f_p}$$

とおく。

定義 有限群GがタイプIであるとは(1)Gの2Sylow部分群G_2が巡回群である、または(2)集合$\left\{x\in G_2 \middle| |x|<2^{e_2}\right\}$($|x|$は元$x$の位数)が$G_2$の指数2の部分群にならない、のいずれかの条件を満たす場合をいう。GがタイプIIであるとはタイプIでない場合をいう。

注意 上記の定義よりGがタイプIIならばG_2は非巡回群でありかつ次の性質を満たす全射準同型写像$\varphi:G_2\to\mathbf{Z}_2=\{0\ ,\ 1\}$が存在する:$\varphi^{-1}(1)$は位数$2^{e_2}$の元からなり、$\varphi^{-1}(0)$は位数$<2^{e_2}$の元からなる。

定理 Gを有限群とし、

$$S=\begin{cases}\{g|g\geq 2, g\equiv 1(\operatorname{mod} N)\} & G\text{がタイプIのとき} \\ \{g|g\geq 2, g\equiv 1(\operatorname{mod} 2N)\} & G\text{がタイプIIのとき}\end{cases}$$

とおく。このとき、

(a)種数$g(\geq 2)$の向き付け可能な閉曲面Σ_gがG-作用を許すとき$g\in S$、

(b)高々有限個のgを除き$g\in S$ならばΣ_gはG-作用を許す

が成り立つ。

(a)の証明 前半ではΣ_gがG-作用を許す場合、Gのタイプにかかわらず$g\equiv 1(\operatorname{mod} N)$が成り立つことを示す。後半では$\Sigma_g$が$G$-作用を許し、さらに$G$がタイプIIのときには$g\equiv 1(\operatorname{mod} 2N)$が成り立つことを示す。

最初にGがp群の場合を考察する。Σ_gがG-作用を許すとする。分岐指数がp^jの分岐点(Σ_g/G上の点)がa_j個あるとする($j=1,\ldots,e_p$)と分岐被覆$\Sigma_g\to\Sigma_g/G$に対するRiemann-

Hurwitzの関係式は

$$2-2g=p^{n_p}(2-2h)-\sum_{j=1}^{e_p}(p^j-1)p^{n_p-j}a_j \qquad \cdots \quad (*)$$

となる、ただし、hはΣ_g/Gの種数。

・pが奇素数の場合　(*)式の右辺は$p^{n_p-e_p}$で割り切れるので$2-2g$も$p^{n_p-e_p}=p^{f_p}$で割り切れる。従って、$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, p^{f_p})$が成り立つ。

・$p=2$かつ$n_2>e_2$の場合　(*)式の右辺は$2^{n_2-e_2}$で割り切れるので$2-2g$も$2^{n_2-e_2}=2^{f_2+1}$で割り切れる。従って、$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^{f_2})$が成り立つ。

・$p=2$かつ$n_2=e_2$の場合　この場合、(*)式が成立するためにはa_{n_2}は偶数でなければならない。(*)式の両辺を2で割った式

$$1-g=2^{n_2}(1-h)-\sum_{j=1}^{n_2-1}(2^j-1)2^{n_2-j-1}a_j-(2^{n_2}-1)\frac{a_{n_2}}{2}$$

から$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^{n_2-e_2})$、つまり$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^{f_2})$が得られる。

次にGが一般の群の場合を考察する。任意の$p\in\delta$に対してG_pをGのpSylow部分群とするとΣ_gはG_p-作用も許すので上記の議論から$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, p^{f_p})$が成り立つ。従って、$G$のタイプにかかわらず$g\equiv 1(\mathrm{mod}\prod_{p\in\delta}p^{f_p})$、つまり$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, N)$が成り立つことがわかる。

次にGがタイプIIの群のときに$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2N)$が成り立つことを示す。$G$のタイプは$G_2$のみから、$N$の因子$p^{f_p}$は$G_p$のみから定まるので$G$がタイプIIの2群の場合に$g\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^{f_2+1})$を示せばよい。従って、以下では$G$をタイプIIの2群とし、そして$g\not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^{f_2+1})$を仮定して矛盾を導く。$g\not\equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^{f_2+1})$は$2^{n_2-e_2}\nmid(g-1)$と同値であることに注意すると(*)式が成立するためにはa_{e_2}は奇数でなければならない。一方、上記の分岐指数に関する条件を満たすG-作用が存在するための必要十分条件はGが次の条件を満たす生成元系を持つことである。

生成元　$u_1,v_1,\ldots,u_h,v_h,x_{1,1},\ldots,x_{1,a_1},\ldots,x_{e_2,1},\ldots,x_{e_2,a_{e_2}}$

関係式　$\prod_{i=1}^{h}[u_i,v_i]\prod_{j=1}^{e_2}\prod_{k=1}^{a_j}x_{j,k}=x_{j,k}^{2^j}=1$

Gがこの生成元系を持つとする。GはタイプIIの群なので上記の注意の条件を満たす全

射準同型写像 $\varphi : G_2 \to \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ が存在する。ところが a_{e_2} が奇数なので $\varphi(\prod_{i=1}^{h}[u_i, v_i]\prod_{j=1}^{e_2}\prod_{k=1}^{a_j} x_{j,k}) \neq 0$ となり矛盾。以上の考察より $g \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2^{f_2+1})$ が得られた。

(a)の証明終

(b)の証明　$\Delta = \{ q \mid q$:素数巾、Gは位数qの元を含む$\} = \{q_1, \ldots, q_m\}$とおく。

証明の方針　十分大きな$g \in S$に対して Riemann-Hurwitz の関係式

$$2 - 2g = d\left(2 - 2h - \sum_{n \in \Delta} a_n (1 - \frac{1}{n})\right) \qquad \cdots \quad (**)$$

を満たす非負の整数の組$(h, a_n (n \in \Delta))$を考える。(h, a_n)から定まる Fuchs 群

$$\Gamma = \left\langle u_1, v_1, \ldots, u_h, v_h, x_{q_1,1}, \ldots, x_{q_1, a_{q_1}}, \ldots, x_{q_m,1}, \ldots, x_{q_m, a_{q_m}} \;\middle|\; \prod_{i=1}^{h}[u_i, v_i]\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{a_{q_j}} x_{q_j,k} = x_{q_j,k}^{q_j} = 1 \right\rangle$$

からGへの torsion free kernel を持つ全射準同型写像が存在することを示す。

まず$g \in S$を十分大きくとると(**)式は、与えられた定数より大きい整数解(h, a_n)を持つことを示す。(**)式を次のように変形する。

$$\sum_{n \in \Delta}(n-1)\frac{d}{n}a_n + 2dh = 2(g-1) + 2d \qquad \cdots \quad (***)$$

(***)式をh, a_nの方程式とみなした場合、左辺の係数の最大公約数は$n_2 = e_2$のときN、$n_2 > e_2$または$2 \nmid d$のとき$2N$となる。(***)式が整数解を持つためには右辺は左辺の係数の最大公約数で割り切れなければならない。つまり、$g \equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)$でなければならない。$g \equiv 1 (\mathrm{mod}\, N)$を満たす十分大きな$g$に対しては(***)式は非負の整数解を持つ。従って、必要ならばgをさらに大きくとることにより(***)式の与えられた定数より大きい整数解を作ることができる。

以下ではgを$g \in S$を満たす十分大きな整数とし、(このとき(***)式の整数解(h, a_n)は十分大きい)(h, a_n)が定める Fuchs 群ΓからGへの torsion free kernel を持つ全射準同型写像$\varphi : \Gamma \to G$を構成する。

STEP1　$\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_s\}$を$G$の生成元系とする。このとき

$$\varphi(u_1) = \varphi(v_1) = \tilde{e}_1, \ldots, \varphi(u_s) = \varphi(v_s) = \tilde{e}_s,$$

$$\varphi(u_{s+1}) = \hat{e}_1, \varphi(v_{s+1}) = \hat{e}_2, \ldots, \varphi(u_h) = \hat{e}_{2(h-s)-1}, \varphi(v_h) = \hat{e}_{2(h-s)}$$

と定める。($\hat{e}_1,\hat{e}_2,\ldots,\hat{e}_{2(h-s)-1},\hat{e}_{2(h-s)}$は証明の最後で定める)

STEP2　$q_i\,(\in\Delta)$が奇素数巾の場合

(i) a_{q_i}が偶数のとき　$\varphi(x_{q_i,1}),\ldots,\varphi(x_{q_i,a_{q_i}})$を$\alpha,\alpha^{-1},\alpha,\alpha^{-1},\ldots,\alpha,\alpha^{-1}$と定める、ただし、$\alpha(\in G)$は位数$q_i$の任意の元。

(ii) a_{q_i}が奇数のとき　$\varphi(x_{q_i,1}),\ldots,\varphi(x_{q_i,a_{q_i}})$を$\alpha^2,\alpha^{-1},\alpha^{-1},\alpha,\alpha^{-1},\alpha,\alpha^{-1},\ldots,\alpha,\alpha^{-1}$と定める、ただし、$\alpha(\in G)$は位数$q_i$の任意の元。

STEP3　$q_i\,(\in\Delta)$が２巾の場合

(i) $n_2=e_2$のとき（すなわちG_2は巡回群）

$$(n-1)\frac{d}{n}:\begin{cases}\text{奇数} & n=2^{e_2}\text{のとき}\\ \text{偶数} & \text{その他の}n\in\Delta\text{のとき}\end{cases}$$

となるので(***)式より$a_{2^{e_2}}$が偶数であることがわかる。

$a_{2^{j_1}},\ldots,a_{2^{j_l}}\ (j_1,\ldots,j_l<e_2)$が奇数、残りの$a_{2^j}\ (j<e_2)$は偶数とする。まず、各$i(1\le i\le l)$に対して$\varphi(x_{2^{j_i},1}),\ldots,\varphi(x_{2^{j_i},a_{2^{j_i}}})$を$\alpha_i,\alpha_i,\alpha_i^{-1},\alpha_i,\alpha_i^{-1},\ldots,\alpha_i,\alpha_i^{-1}$と定める、ただし、$\alpha_i(\in G)$は位数$2^{j_i}$の任意の元。次に$\varphi(x_{2^{e_2},1}),\ldots,\varphi(x_{2^{e_2},a_{2^{e_2}}})$を$\beta_1,\beta_1',\beta_2,\beta_2',\ldots,\beta_l,\beta_l',\beta_1,\beta_1^{-1},\ldots,\beta_1,\beta_1^{-1}$と定める、ただし、$\beta_i,\beta_i'(\in G)$は$\alpha_i^{-1}=\beta_i\beta_i'$を満たす位数$2^{e_2}$の元。この条件を満たす$\beta_i,\beta_i'$の存在は、位数$2^{e_2}$の巡回群において、位数$<2^{e_2}$の任意の元は位数$2^{e_2}$の２元の積として表される、ことから保証される。最後にa_{2^j}が偶数となる$\varphi(x_{2^j,1}),\ldots,\varphi(x_{2^j,a_{2^j}})$は$\alpha,\alpha^{-1},\alpha,\alpha^{-1},\ldots,\alpha,\alpha^{-1}$と定める、ただし、$\alpha(\in G)$は位数$2^j$の任意の元。

(ii) $n_2>e_2$かつGがタイプIIのとき

$a_{2^{e_2}}$が偶数ならば位数2^{e_2}の元が生成する巡回群に対して(i)で用いた方法を適用することによりφを定めることができるので、以下では$a_{2^{e_2}}$が偶数であることを示す。

GがタイプIIなので$g\equiv 1(\mathrm{mod}\,2N)$、特に$g\equiv 1(\mathrm{mod}\,2^{n_2-e_2})$が成り立つ。(***)式の右辺第１項は$2^{n_2-e_2+1}$で割り切れるので左辺第１項も$2^{n_2-e_2+1}$で割り切れなければならない。ところが

$$(n-1)\frac{d}{n}:\begin{cases}\text{ちょうど}2^{n_2-e_2}\text{で割り切れる} & n=2^{e_2}\text{のとき}\\ 2^{n_2-e_2+1}\text{で割り切れる} & \text{その他の}n\in\Delta\text{のとき}\end{cases}$$

なので(***)式が成り立つためには$a_{2^{e_2}}$が偶数でなければならない。

(iii) $n_2 > e_2$かつGがタイプIのとき

(iii-1) $a_{2^{e_2}}$が偶数のとき　(i)で用いた方法によりφを定めればよい。

(iii-2) $a_{2^{e_2}}$が奇数のとき　$g \equiv 1 (\bmod N)$かつ$g \not\equiv 1 (\bmod 2N)$が成り立つ（もし$g \equiv 1 (\bmod 2N)$が成り立つならば(ii)の議論により$a_{2^{e_2}}$が偶数となる)。$G_2$の位数$< 2^{e_2}$の元全体が生成する部分群を$P$とおく。$P$は$G_2$の正規部分群であり、$G_2/P$は基本Abel群$\mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2$に同型となる（$G_2/P$が可換であることは$G_2/P$の元の位数が1または2であることからわかる)。

・$P = G_2$の場合　位数2^{e_2}の任意の元αは位数$< 2^{e_2}$の元$\beta_1, \ldots, \beta_l$の積として表される。例えば、$\beta_1, \ldots, \beta_l$の位数が$2^{j_1}, \ldots, 2^{j_l} (j_1 < \cdots < j_l < e_2)$であるとする。このとき$\varphi(x_{2^{e_2},1}) = \alpha^{-1}$、$\varphi(x_{2^{j_1},1}) = \beta_1, \ldots,$ $\varphi(x_{2^{j_l},1}) = \beta_l$と定める。このように$\varphi$を定めると未決定の$\varphi(x_{2^{e_2},2}), \ldots, \varphi(x_{2^{e_2},a_{2^{e_2}}})$の個数$a_{2^{e_2}} - 1$は偶数なので(i)で用いた方法により$\varphi$を定めることができる。（$j_1 < \cdots < j_l$でない場合も同様)

・$P \neq G_2$の場合　GはタイプI（そしてG_2が非巡回群）なので$[G_2 : P] \neq 2$、つまり、$[G_2 : P] \geq 4$。よって

$$G_2/P \cong \mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2 \qquad (\tfrac{1}{2}[G_2 : P] (\geq 2)\text{個の直積})$$

となる。G_2/Pの異なる2つの生成元$\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2$（$\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2$は$G_2$の元$\alpha_1, \alpha_2$が定める$G_2/P$の元）の積$\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2$はまた生成元となるので、まず$\varphi(x_{2^{e_2},1}) = \alpha_1, \varphi(x_{2^{e_2},2}) = \alpha_2, \varphi(x_{2^{e_2},3}) = (\alpha_1\alpha_2)^{-1}$と定める。このように$\varphi$を定めると未決定の$\varphi(x_{2^{e_2},4}), \ldots, \varphi(x_{2^{e_2},a_{2^{e_2}}})$の個数$a_{2^{e_2}} - 3$は偶数なので(i)で用いた方法により$\varphi$を定めることができる。

以上で定めたφは積の順序の交換を行うと$\prod\prod \varphi(x_{q_j,k}) = 1$を満たす。従って、$\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{a_{q_j}} \varphi(x_{q_j,k})$は$G$の交換子群に含まれる。STEP1で未決定であった$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots,$ $\hat{e}_{2(h-s)-1}, \hat{e}_{2(h-s)}$を$\varphi(\prod_{i=1}^{h}[u_i, v_i]\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{a_{q_j}} x_{q_j,k}) = 1$が成り立つように定める。　(b)の証明終

付　録　3

例1　Gが位数p（奇素数）の巡回群$\mathbf{Z}_p$の場合の母関数$q_G(z)$（[2, p.23 および p.34]）.

このとき、$O(G)=\{p\}$、$n_0(G)=1$、$q_0=p$、$q_1=\dfrac{p-1}{2}$であり、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0,x_1)=\frac{x_0}{1-x_0}+\frac{x_1^2}{(1-x_0)(1-x_1)}\quad,\quad q_G(z)=\frac{z^p+z^{p-1}-z^{\frac{3p-1}{2}}}{z^{p-1}(1-z^p)(1-z^{\frac{p-1}{2}})}.$$

例2　Gが位数2の巡回群$\mathbf{Z}_2$の場合の母関数$q_G(z)$（[2, p.23 および p.34]）.

このとき、$O(G)=\{2\}$、$n_0(G)=1$、$q_0=2$、$q_1=\dfrac{1}{2}$であり、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0,x_1)=\frac{x_0}{1-x_0}+\frac{x_1^2}{(1-x_0)(1-x_1^2)}\quad,\quad q_G(z)=\frac{1+z-z^2}{(1-z^2)(1-z)}.$$

例3　Gが位数$2p$（p: 奇素数）の二面体群$D_p=\left\langle x,y \,\middle|\, x^p=y^2=1, yxy=x^{-1}\right\rangle$の場合の母関数$q_G(z)$（[2, p.32]）.

このとき、$O(G)=\{2,p\}$、$n_0(G)=1$、$q_0=2p$、$q_1=\dfrac{p}{2}$、$q_2=p-1$であり、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0,x_1,x_2)=-x_0-x_1^2-\frac{1}{1-x_2}+\frac{1}{(1-x_0)(1-x_1^2)(1-x_2)},$$

$$q_G(z)=z^{1-2p}\left(-z^{2p}-z^p-\frac{1}{1-z^{p-1}}+\frac{1}{(1-z^{2p})(1-z^p)(1-z^{p-1})}\right).$$